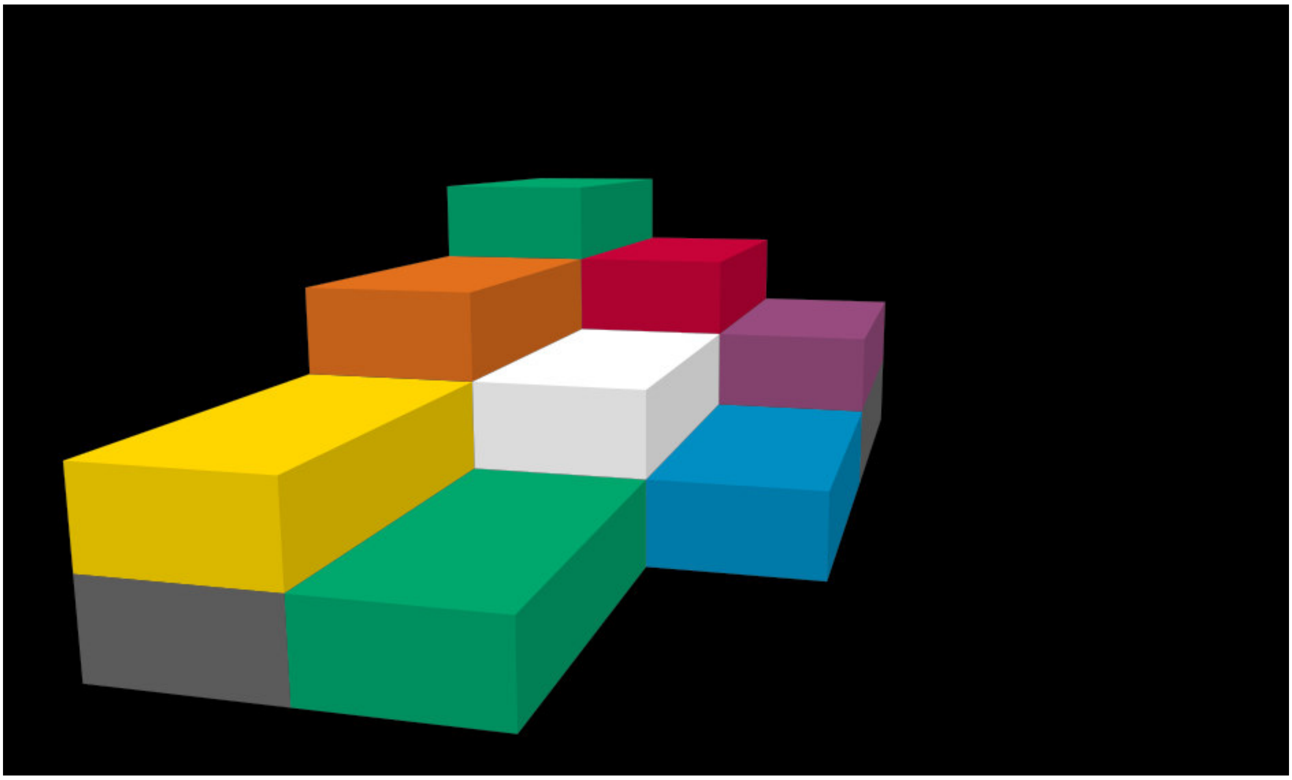
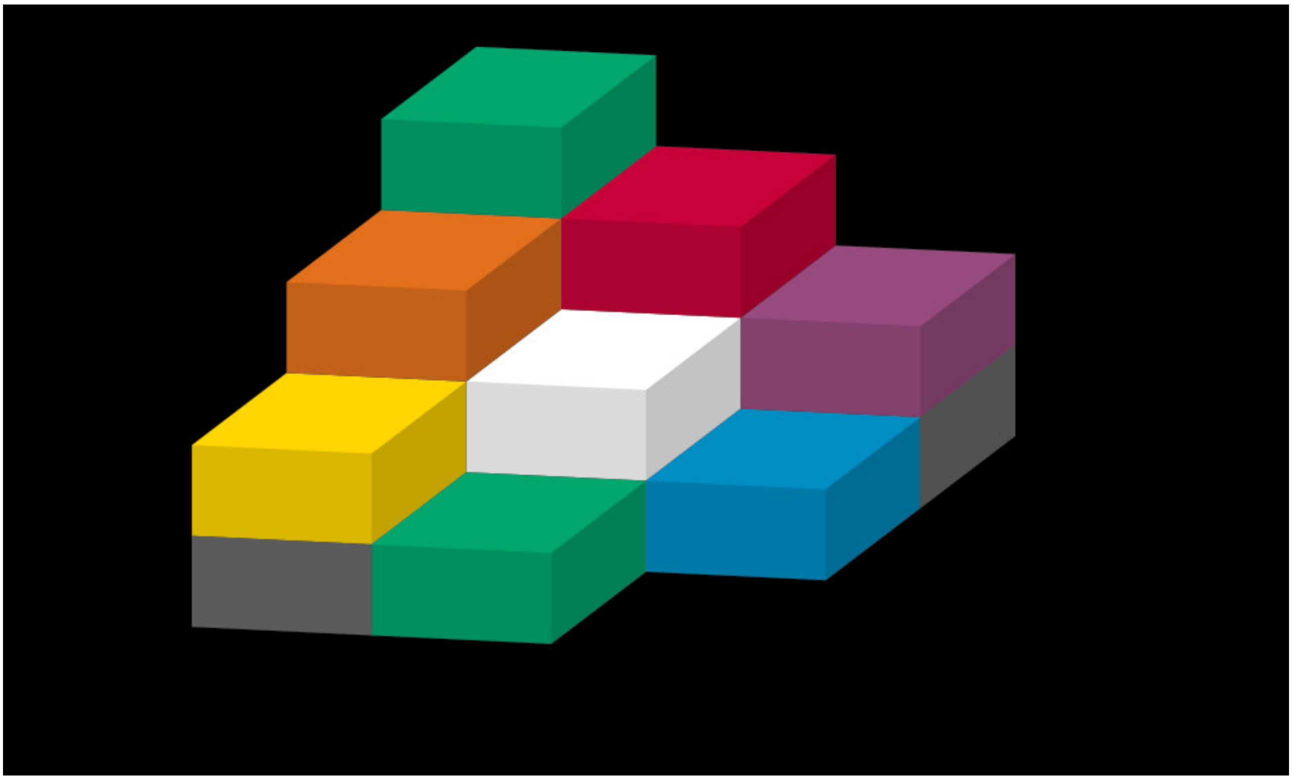


Figur 1 er et foto af en stabel farvede mursten. Fotoet måler 10,2 cm i højden og 17 cm i bredden.
En mursten er kasseformet, bestående af 6 rektangulære flader, med rette vinkler overalt. Murstenene er stablet så pænt, at alle ligger i samme vinkel. Derfor har de alle sammen de samme 3 forsvindingspunkter. Hvis murstenene bare var smidt hulter til bulter, kunne hver mursten have sit eget sæt forsvindingspunkter.

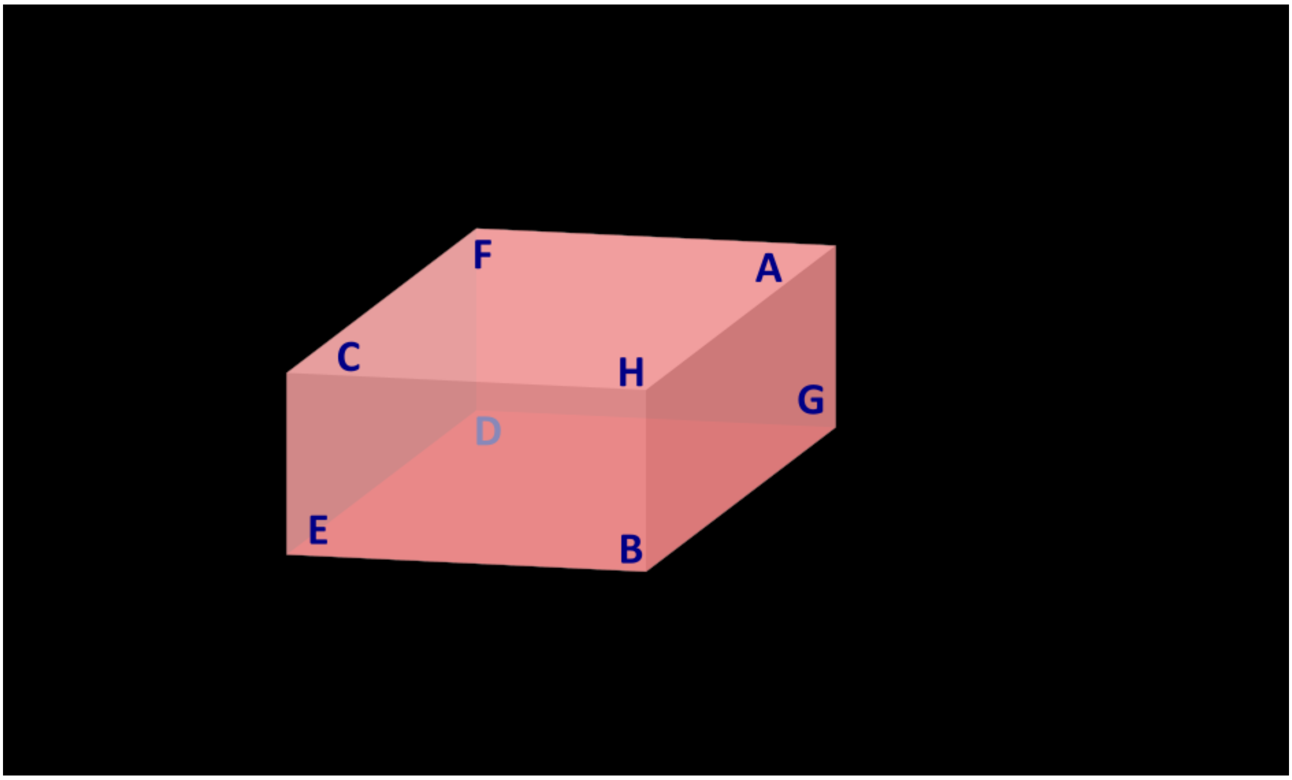
Et foto kan opfattes som et maleri på et halvgennemsigtigt, rektangulært stykke lærred, der er anbragt foran kunstmaleren. Maleren har placeret sig i en passende afstand vinkelret på lærredets midte. Med en lang pensel overføres motiv til lærred, hvor maleren end kigger hen uden at flytte sig. Rette linjer gengives som rette linjer. Hvis der er parallelle linjer på et motiv, vil de ofte blive til forsvindingslinjer på maleriet, og disse linjer vil styre imod præcis samme punkt, forsvindingspunktet. Det er en uundgåelig mekanisme ved dét at gengive noget rumligt på en plan flade. Et forsvindingspunkt kan ligge enten inden for maleriet eller et sted uden for lærredet.
(Man bruger en lignende metode når man kopierer en papirtegning ved at lægge et tyndt stykke papir oven på den oprindelige tegning og eftergør de linjer, man kan se igennem papiret, med en blyant.)

Bemærk, at det samme foto kan forestille enten en lille kasse, som er tæt på kameraet - eller en dobbelt så høj, dobbelt så bred og dobbelt så lang kasse, som er dobbelt så langt væk.



Figur 2 er en isometrisk ("ikke-perspektivisk") tegning af murstensstablen, set fra samme vinkel som på fotoet. Bemærk, at tegningen består af parallelle linjer i 3 retninger. Et foto taget fra en satellit 700 km væk ville ligne denne tegning.

Figur 3 er murstensstablens grundplan (stablen set ovenfra).



Figur 4 er en isometrisk tegning af en af disse mursten. På tegningen er den gjort halvgennemsigtig, så man også kan se murstenens bagside. I forhold til *Figur 2* er alle mål fordoblet.

De 6 flader fremtræder på tegningen som parallellogrammer, og de er parvis ens. De 12 kanter kan opdeles i grupper af 4 kanter, som er indbyrdes parallelle. De 8 hjørner har fået hver sit bogstav. (D er det bageste hjørne, som normalt ikke er synligt.)

Det midterste af de synlige hjørner er det mest fremstående hjørne, som kan kaldes murstenens "Hovedhjørne" (H). For at lette udregningen vil vi flytte murstenen ind i et koordinatsystem, hvor Hovedhjørnet har koordinaterne (0,0,0). Alle andre hjørner på murstenen befinder sig dybere inde i billedet, dvs deres z-værdier er positive.

Figur 5 viser alle murstenens hjørne-koordinater, angivet i cm med 3 decimalers nøjagtighed og i samme målestok som *Figur 2*:

Hjørne	x	y	z
H	0	0	0
A	1,253	0,955	4,922
B	0,000	-1,202	0,233
C	-2,375	0,113	0,583
D	-1,121	-0,134	5,738
E	-2,375	-1,088	0,816
F	-1,121	1,068	5,505
G	1,253	-0,247	5,155

De gule felter kan aflæses på tegningen, de grønne må udregnes.

For den retvinklede trekant BHA gælder Pythagoras:

$|AH|^2+|BH|^2=|AB|^2$

som vha afstandsformlen kan omskrives til

$(Ax^2 +Ay^2 +Az^2)+(Bx^2 +By^2 +Bz^2)=(Ax-Bx)^2+(Ay-By)^2+(Az-Bz)^2$

hvilket kan koges ned til **Az*Bz = -(Ax*Bx+Ay*By)**

For de retvinklede trekanter CHB og AHC gælder tilsvarende, at

Bz*Cz = -(Bx*Cx+By*Cy)

og **Cz*Az = -(Cx*Ax+Cy*Ay)**

Ved at bruge disse formler finder vi at

Az*Bz=1,148 **Bz*Cz**=0,136 **Cz*Az**=2,869

Ved derefter at bruge observationerne

Az = kvadratrod((Az*Bz)*(Cz*Az)/(Bz*Cz))

og **Bz = kvadratrod((Bz*Cz)*(Az*Bz)/(Cz*Az))**

og **Cz = kvadratrod((Cz*Az)*(Bz*Cz)/(Az*Bz))**

finder vi værdierne i de grønne felter.

Nogle af værdierne i de blå felter kan aflæses direkte på tegningen, men de kan alle sammen beregnes ved vektor-addition ud fra A, B og C:

G=A+B, F=C+A, E=B+C, og D=A+B+C.

Eksempel: Gx=Ax+Bx, Gy=Ay+By, og Gz=Az+Bz.

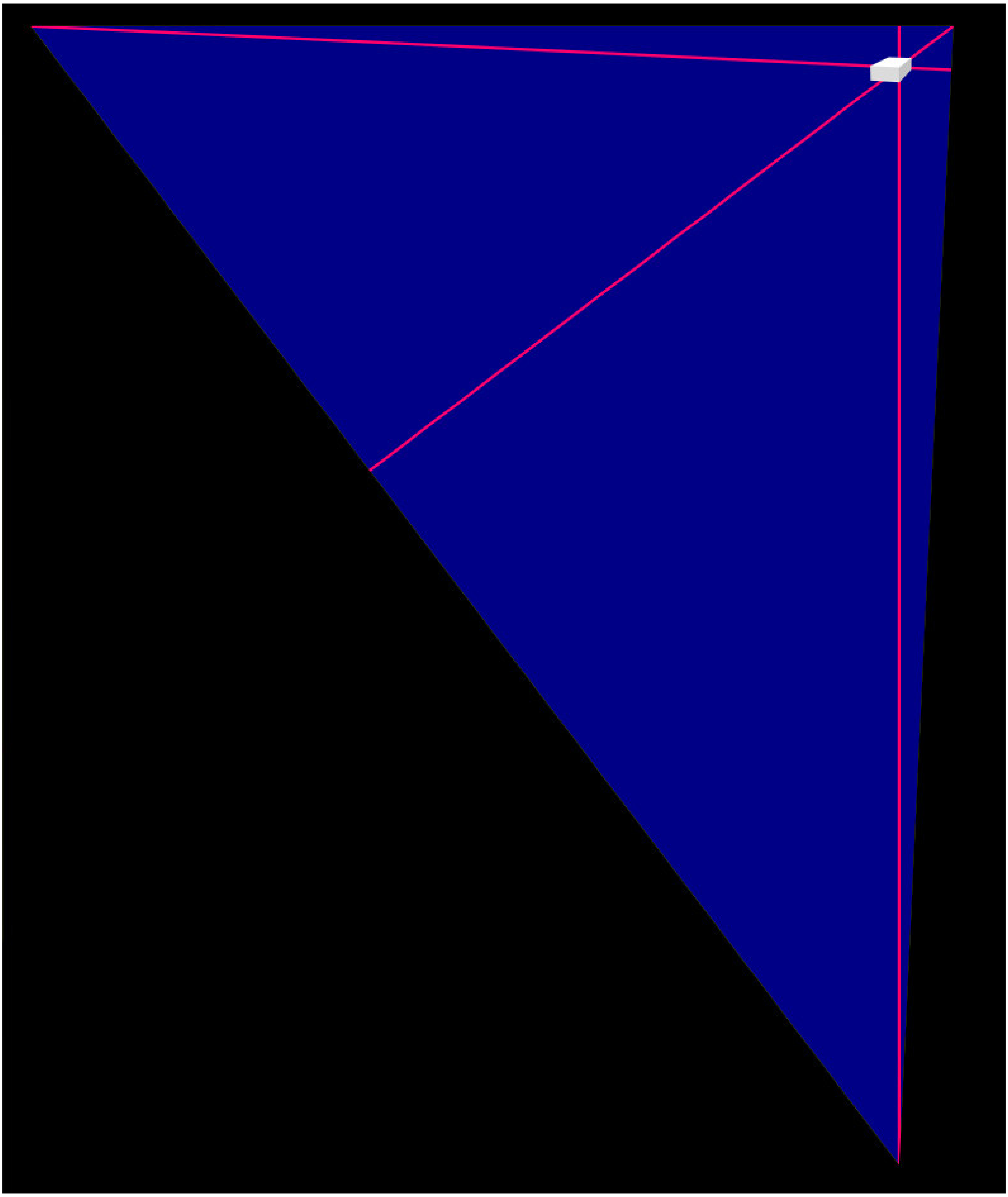
Vha de fundne koordinater kan vi udregne forholdet mellem højde, bredde og længde på en sådan mursten.

Højden **|HB| = kvadratrod(Bx^2+By^2+Bz^2)** = 1,224 cm

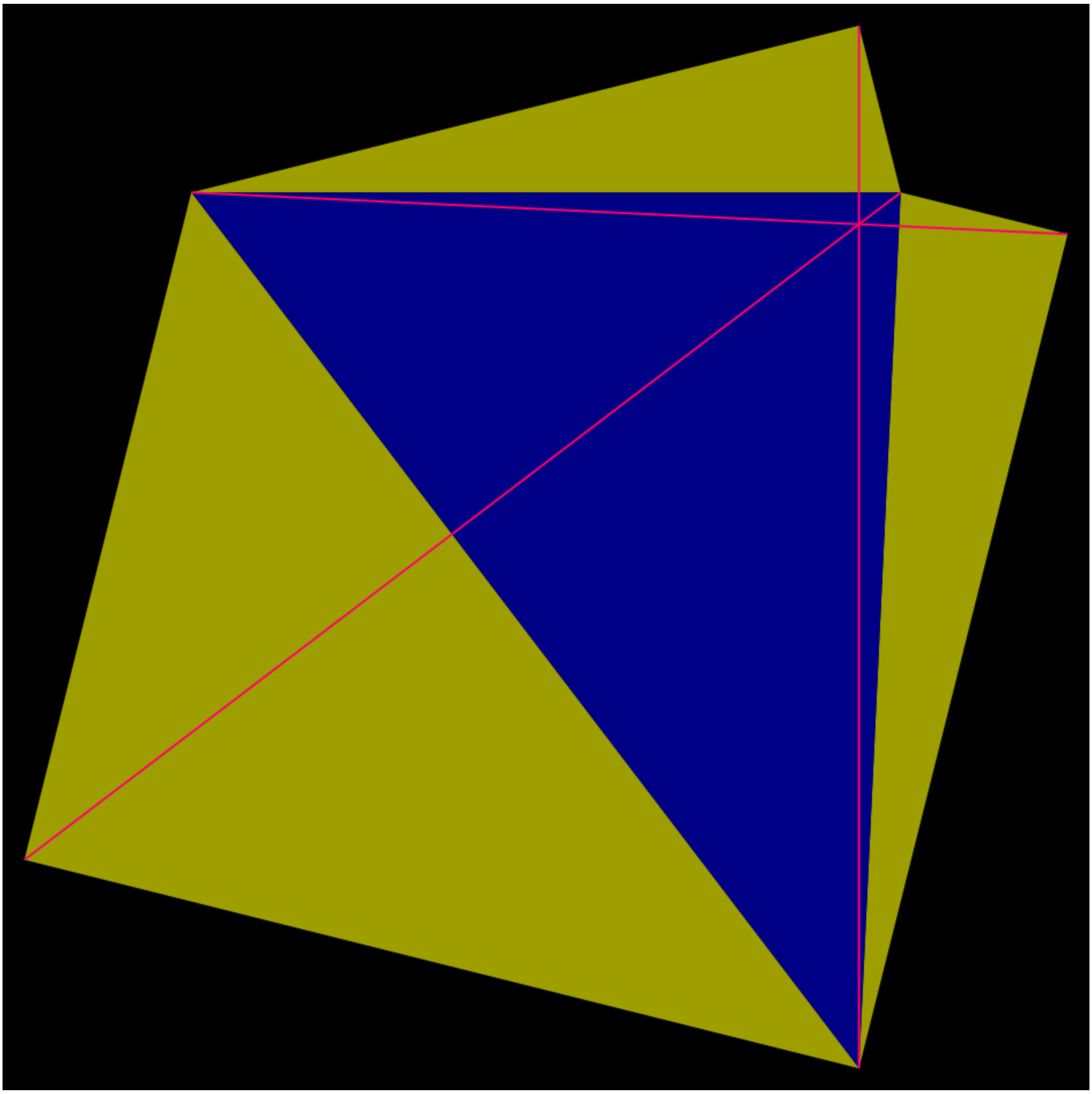
Bredden **|HC| = kvadratrod(Cx^2+Cy^2+Cz^2)** = 2,448 cm

Længden **|HA| = kvadratrod(Ax^2+Ay^2+Az^2)** = 5,168 cm

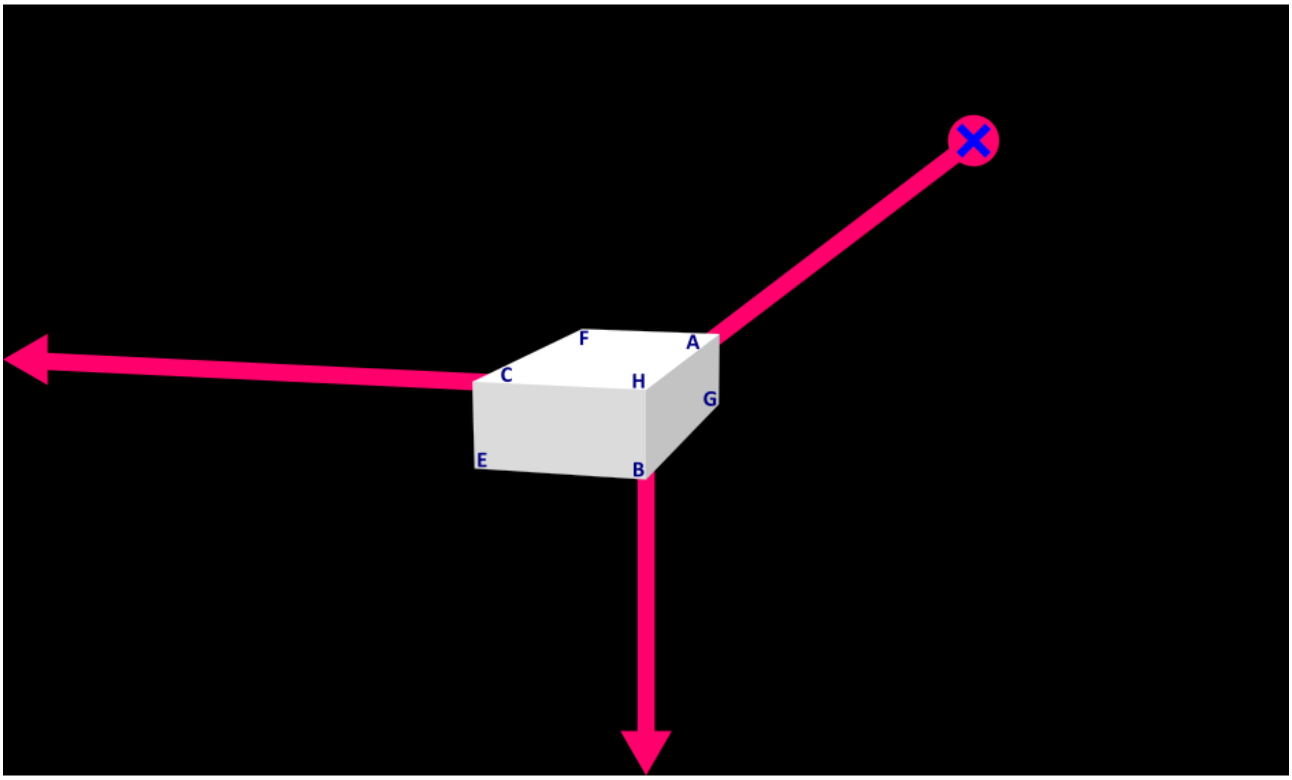
De tre forsvindingspunkter kan forbindes til en "Bermudatrekant" (den blå trekant på **Figur 6** herunder).
De tre højdelinjer (de røde linjer på tegningen) i denne trekant krydser hinanden i et punkt, "Fokuspunktet". Tilfældigvis falder Fokuspunktet sammen med det midterste hjørne på den hvide mursten. For overskuelighedens skyld er alle andre mursten udeladt fra tegningen.
På et ikke-beskåret fotografi (som *Figur 1*) vil Fokuspunktet være billedets midte.



Figur 7 er en fold-selv udgave af "Bermudapyramiden", som består af Bermudatrekanten omgivet af 3 retvinklede trekanter (de gule flapper på tegningen). Når man folder de gule flapper ind, vil de retvinklede spidser mødes i pyramidens toppunkt, som er lig med kameraets position. Pyramiden hviler på fotopapiret. Vha Pythagoras kan man nu udregne "Kameraafstanden" (afstanden mellem kamera og papir).



Kameraet peger direkte på Hovedhjørnet i den hvide mursten. Hovedhjørnet deler koordinater med Fokuspunktet (0,0,0). Kameraafstanden er i fotografiets målestok 17 cm, og kameraet har koordinaterne (0,0,-17) cm.



På **Figur 8** er hjørnerne på den hvide mursten navngivet som på *Figur 4*. (Det skjulte hjørne hedder D.) Fra Hovedhjørnet H udgår kanterne HA, HB og HC med retning imod hver sit forsvindingspunkt. Et enkelt forsvindingspunkt ligger inden for fotografiets rammer (markeret med et kryds). Retningen til de andre to er markeret.

Vi foretager nu et tankeeksperiment. Vi forestiller os, at fotoet af den hvide mursten i virkeligheden er en isometrisk tegning af en rumlig figur. Ligesom en kasse består den af 6 firkantede, plane flader, men de er ikke rektangler, for så ville de på tegningen fremtræde som parallellogrammer.

Bermudatrekanten ligger i "Nuldybden", dvs z=0. Kameraet er placeret så z=-17 cm. Mellem kamera og hvert forsvindingspunkt forhøjes z-værdien altså med 17 cm.
Nu forskyder vi Bermudatrekanten 17 cm ind i billedet, så trekantens z-værdier ændres fra 0 til 17 cm; men x- og y-værdierne ændres ikke.
Hovedhjørnet H ligger i Nuldybden. De linjer som udgår fra H søger imod hver sit forsvindingspunkt, som nu ligger 17 cm inde. Mellem H og et forsvindingspunkt forhøjes z-værdien altså med 17 cm.
Afstanden fra H til forsvindingspunktet for HA er, målt på fotoet, lidt mere end 5,4 cm. Linjestykket HA er lidt over 1,2 cm. På strækningen fra H til A forhøjes z-værdien altså med 17 cm gange 1,2/5,4 = cirka 3,8 cm. Så hjørne A har z-værdien 3,8 cm.
Øvrige z-værdier kan udregnes på lignende måde. Selv koordinaterne for det skjulte hjørne D kan man slutte sig til. Det er dog kun z-værdierne for A, B og C, vi behøver for at komme videre.

Vi skifter kunstmaleren fra første afsnit ud med et kamera, og lærredet med et stykke halvgennemsigtigt fotopapir. Kameraet peger vinkelret ind på papiret og rammer Fokuspunktet (0,0,0). Motivet er den hvide mursten. Kameraafstanden er 17 cm. Vi vil nu beregne, hvor hvert af murstenens hjørner skal gengives på papiret.

Hjørne H ligger i Nuldybden, dvs det berører papiret i præcis det punkt, hvor det skal gengives på papiret, så dét punkt er fundet uden udregninger.

Hjørne A befinder sig 4,922 cm inde i billedet. Kameraet har z-værdien -17 cm, så dybdeforskellen imellem kamera og hjørne A er 17+4,922 = 21,922 cm.
En lige linje mellem kamera og hjørne A vil krydse igennem fotopapiret i punktet (Ax * 17/21,922; Ay * 17/21,922; 0). Dvs man finder foto-koordinaterne for hjørne A ved at gange x- og y-værdierne med "Til-Foto"-faktoren 17 / (17+4,922) = 0,775.

Figur 9 er forsynet med en kolonne med faktoren for hvert hjørne.

Hjørne	x	y	z	Faktor
H	0	0	0	1,000
A	1,253	0,955	4,922	0,775
B	0,000	-1,202	0,233	0,986
C	-2,375	0,113	0,583	0,967
D	-1,121	-0,134	5,738	0,748
E	-2,375	-1,088	0,816	0,954
F	-1,121	1,068	5,505	0,755
G	1,253	-0,247	5,155	0,767

På **Figur 10** er hjørnernes placering på fotoet beregnet ved at gange med de fundne faktorer. Koordinaterne har fået navnene x0, y0 og z0. En ekstra kolonne er tilføjet, nemlig z1, hvor også hjørnets z-koordinat er ganget med faktoren. Vi kan genkende z1-værdierne som dem, vi fandt i forbindelse med tankeeksperimentet om den "skæve" mursten.

Hjørne	x0	y0	z0	z1
H	0,000	0,000	0,000	0,000
A	0,972	0,741	0,000	3,817
B	0,000	-1,185	0,000	0,230
C	-2,296	0,109	0,000	0,564
D	-0,838	-0,100	0,000	4,290
E	-2,266	-1,039	0,000	0,779
F	-0,847	0,807	0,000	4,158
G	0,962	-0,189	0,000	3,956

z1-værdierne kan bruges til at rekonstruere *Figur 9*. Man bruger her den modsatte faktor ("Til-Motiv"-faktoren): For hjørne A er faktoren 17 / (17-3,817) = 1,290.

Konklusion

Når et foto af et kasseformet motiv har 3 forsvindingspunkter, er det muligt at rekonstruere forholdet mellem kassens 3 dimensioner samt Kameraafstanden.

Man kan gå frem således:

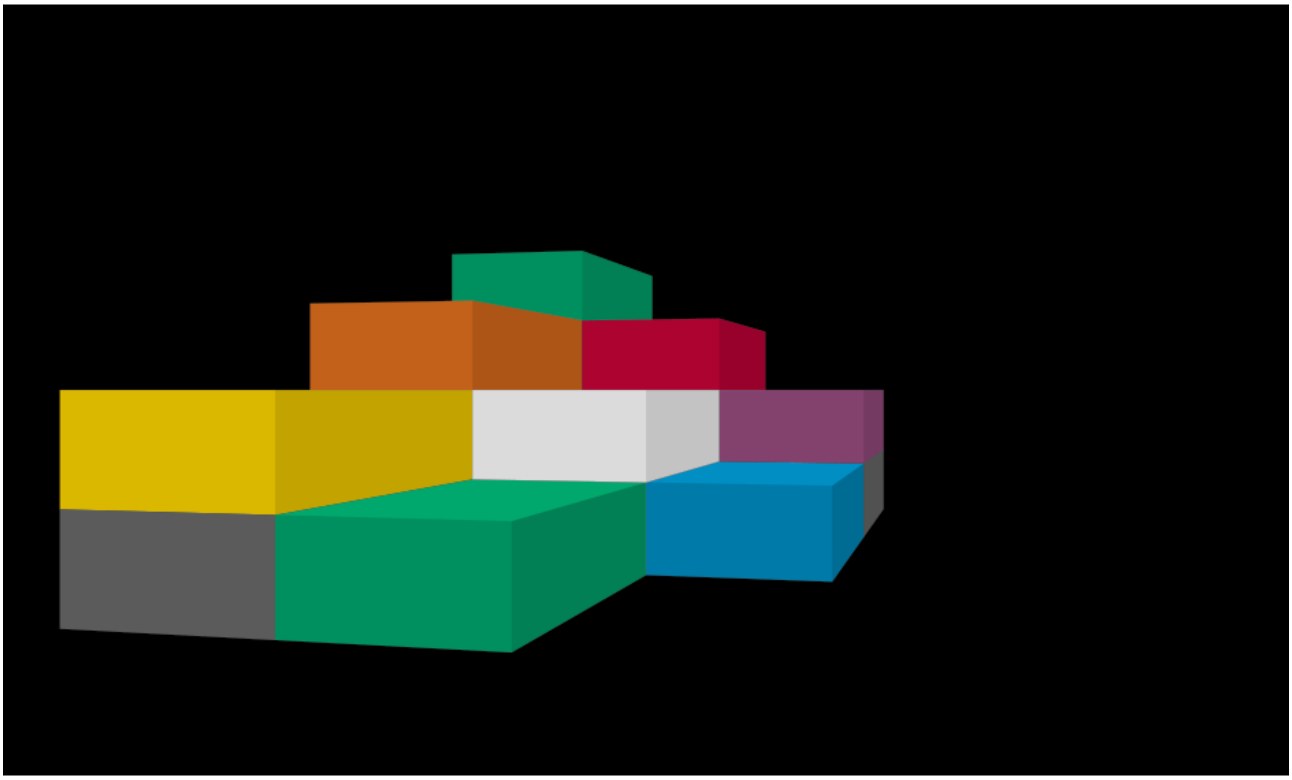
Tegn Bermudatrekanten
Find Fokuspunktet
Flyt koordinatsystemet, så Fokuspunktet=(0,0,0)
Tegn Bermudapyramiden
Find Kameraafstanden
Giv kassens Hovedhjørne z-værdien 0
Giv forsvindingspunkterne z-værdien = Kameraafstanden
Udregn z-værdierne for hjørne A, B og C i "den skæve kasse på fotoet"
Find "Til-Motiv"-faktorerne for hjørne A, B og C
Find de faktiske koordinater for hjørne A, B og C
Udregn kassens højde, bredde og længde

I eksemplet med den hvide mursten er resultaterne disse:
Højde, bredde og længde = 1,224 x 2,448 x 5,168 cm; Kameraafstand = 17 cm.
Alle disse mål er i fotografiets målestok, så kun *forholdet* mellem de 4 tal er korrekt.

EPILOG

En murersvend oplyser, at murstenene i virkeligheden er 5,4 cm høje.
Dermed er dimensionerne 5,4 x 10,8 x 22,8 cm.
Og Kameraafstanden er i virkeligheden 75 cm.

Hvis vi følger ovenstående opskrift på den gule mursten, bliver resultaterne disse:
Højde, bredde og længde = 1,643 x 3,287 x 6,939 cm; Kameraafstand = 17 cm.
Også her bliver de virkelige dimensioner 5,4 x 10,8 x 22,8 cm.
Men Kameraafstanden bliver kun 55,857 cm.
Den gule mursten ligger altså ikke lige så dybt inde i billedet som den hvide.



Figur 11 er et foto af murstensstablen set fra en anden vinkel, som kun frembringer 2 forsvindingspunkter. De 2 forsvindingspunkter ligger i samme højde. Kameraet peger vandret ind på stablen, og alle lodrette kanter gengives som lodrette; i stedet for at være rettet imod et forsvindingspunkt forbliver de parallelle. Fokuspunktet ligger på en lige linje imellem de to forsvindingspunkter. Men hvor?

Der findes ikke nogen generel metode til at finde Fokuspunktet på et foto af et kasseformet motiv, når fotoet kun indeholder 2 forsvindingspunkter. Men hvis et foto ikke er beskåret, vil Fokuspunktet være præcis midten af billedet. Og sådan er det her. Fokuspunktet deler igen koordinater med hjørne H på den hvide mursten.

Vi flytter koordinatsystemet, så Fokuspunktet=(0,0,0)
Forsvindingspunkterne V1=(-68,0,0) og V2=(4,25;0;0)
Kameraets position CAM=(0,0,-CAMz)

V1:CAM:V2 er en ret vinkel. Derfor gælder Pythagoras:
$|V1:CAM|^2+|V2:CAM|^2=|V1:V2|^2$
hvilket kan koges ned til **CAMz=kvadratrod(-V1x*V2x)**
Kameraafstanden CAMz=17 cm, målt i fotografiets målestok.

Resten af opskriften på foregående side kan følges uændret for hjørne A og C; hjørne B skal have samme z-værdi som hjørne H.