Den Handelsrejsendes Problem
- brikker til en angrebsvinkel

Af Per Kejser-Andersen, marts 2017

Afstands-tabellen T

Den Handelsrejsendes Problem (The Travelling Salesman Problem) går ud på at finde den korteste rute fra et startpunkt, gennem en række andre byer som man så skal bestemme den optimale rækkefølge af, og tilbage til startpunktet.

Jeg fortalte engang en af mine venner om dette datalogiske problem, og hans umiddelbare reaktion var: ”Jamen, hvis computeren har et landkort med byerne på, så kan den da bare SE hvad den korteste rute er!” En sådan opgave lyder jo som lige præcis dét, en computer er skabt til. Men pudsigt nok kender man ikke nogen effektiv metode til at gøre det.

Antag vi har lavet et program, som kræver at vi indtaster en tabel over afstande mellem byerne. Med f.eks. 6 byer at besøge skal computeren nu, vha. tabellen samt programmets instruktioner, udregne længden af samtlige ruter fra startpunktet A via B-C-D-E-F-G (i alle mulige rækkefølger) og tilbage til A. Og vha. en sammenligning mellem disse ruter afgøre, hvilken af dem der er kortest. Vi mennesker ville finde den opgave besværlig, men det er nemt for en computer. Måske kan computeren gøre det på 1 sekund, og det er jo ikke noget at snakke om.

Men hvad nu hvis der er 7 byer at besøge, i stedet for kun 6? Ja, så er computeren faktisk nødt til at afprøve 7 gange så mange ruter, og derfor vil opgaven tage 7 sekunder. Og med 8 byer er computeren nødt til at afprøve 8*7 gange så mange ruter, altså vil det tage 56 sekunder. Og hvad nu hvis der er 30 byer? Det lyder helt uoverkommeligt. Ved en forøgelse af antal byer vil køretiden vokse eksplosivt. Det er dette, der gør metoden ineffektiv.

Her ses en afstandstabel med 6 satellitbyer foruden start- og slutbyen A:

Tabel T	A	B	C	D	E	F	G
A	-	753	696	510	734	702	811
B	795	-	675	511	694	702	841
C	637	491	-	485	497	486	569
D	885	904	867	-	885	874	867
E	730	664	737	552	-	744	747
F	869	743	655	505	638	-	786
G	835	634	787	492	690	673	-

Nulsums-tabellen T0

Når man leger med sådanne tabeller, kan man indsætte præcis de tal man vil – og stadig have en tabel som svarer til en konkret opgave. Der findes nemlig en del operationer som kan udføres på en tabel, uden at man ændrer ved hvilken rute der er den korteste.

Man kan have en intuitiv fornemmelse af, at en bestemt tabel ikke giver mening – nemlig f.eks. hvis afstanden fra A til B ikke er identisk med afstanden fra B til A. Men det svarer jo helt til den dagligdags erfaring at visse gader er ensrettede.
En anden kontraintuitiv egenskab kan være, at den direkte tur fra A til B er længere end turen fra A via C til B. Men for enhver sådan afstandstabel kan der konstrueres en ækvivalent tabel som giver intuitiv mening, nemlig derved at man adderer en passende høj konstant til enhver afstand i tabellen.

Man kan lægge en konstant til samtlige felter i en række. Man kan lægge en konstant til samtlige felter i en søjle. Herunder ses hvordan en tabel T på den måde fuldstændig ændrer udseende – uden at opgaven af den grund får en anden løsning.

Tabel T	A	B	C	D	E	F	G	Sum	Addend
A	-	753	696	510	734	702	811	4206	r1 = -717
B	795	-	675	511	694	702	841	4218	r2 = -703
C	637	491	-	485	497	486	569	3165	r3 = -529
D	885	904	867	-	885	874	867	5282	r4 = -853
E	730	664	737	552	-	744	747	4174	r5 = -694
F	869	743	655	505	638	-	786	4196	r6 = -699
G	835	634	787	492	690	673	-	4111	r7 = -697
Sum	4751	4189	4417	3055	4138	4181	4621	29352	-4892
Addend	s1 = -96	s2 = 0	s3 = -9	s4=+164	s5=+10	s6 = +2	s7 = -71	0	

Addenderne er fundet vha. formler såsom r1=(29352/6-4206*6-4751)/35 og s1=r1*6+4206.
Addend-rækken og –søjlen er tilføjet som et hjælpeværktøj for at nå til tabel T0:

Tabel T0	A	B	C	D	E	F	G	Sum
A	-	36	-30	-43	27	-13	23	0
B	-4	-	-37	-28	1	1	67	0
C	12	-38	-	120	-22	-41	-31	0
D	-64	51	5	-	42	23	-57	0
E	-60	-30	34	22	-	52	-18	0
F	74	44	-53	-30	-51	-	16	0
G	42	-63	81	-41	3	-22	-	0
Sum	0	0	0	0	0	0	0	

Den resulterende tabel, "nulsums-tabellen" T0, har den særlige egenskab, at enhver rækkesum og enhver søjlesum er nul. Når dette gælder, er gennemsnitslængden af samtlige ruter også nul. Den korteste rute vil nødvendigvis være negativ, og en negativ rute vil indeholde mindst én negativ delstrækning.

Reduktions-tabellen R0

Hvis nu man vidste, at delstrækningen lGBl indgik i den korteste rute – så ville opgaven blive simplere, idet nogle andre delstrækninger automatisk ville udgå som mulige valg.
De således udelukkede felter er markeret med gul og orange i denne udgave af tabel T0:

Tabel T0	A	B	C	D	E	F	G
A	-	36	-30	-43	27	-13	23
B	-4	-	-37	-28	1	1	67
C	12	-38	-	120	-22	-41	-31
D	-64	51	5	-	42	23	-57
E	-60	-30	34	22	-	52	-18
F	74	44	-53	-30	-51	-	16
G	42	-63	81	-41	3	-22	-

Og resultatet af udelukkelsen er en afstandstabel med 5 satellitbyer i stedet for 6:

Tabel T(-1)	A	C	D	E	F	G
A	-	-30	-43	27	-13	23
C	12	-	120	-22	-41	-31
D	-64	5	-	42	23	-57
E	-60	34	22	-	52	-18
F	74	-53	-30	-51	-	16
B	-4	-37	-28	1	1	-

I tabel T(-1) er tabelsummen (summen af alle 30 felter) -130, nemlig lGBl-lBGl. Den gennemsnitlige længde af samtlige 5! mulige ruter i tabel T(-1) er derfor (-130/5) = -26.
Samtlige 5! ruter i tabel T0, hvori lGBl indgår, vil derfor have gennemsnitslængden -63-26 = -89.

Vi kan ud fra T0 danne "reduktions-tabellen" R0.
Her angiver hvert felt hvilken gennemsnits-rutelængde der vil blive i (N-1) opgaven, hvis det pågældende felt vælges. (Tallene er afrundet til hele tal.)

Tabel R0	A	B	C	D	E	F	G
A	-	44	-38	-39	44	-30	19
B	-12	-	-37	-44	7	-8	93
C	20	-38	-	143	-33	-39	-53
D	-68	67	-18	-	46	34	-60
E	-77	-36	45	18	-	73	-22
F	91	53	-55	-41	-72	-	24
G	46	-89	103	-38	7	-30	-

R0 er i sig selv en nulsums-tabel. Ved dannelsen af R0 sker der ikke noget informationstab, idet T0 kan rekonstrueres ud fra R0. Bemærk, at der kan findes felter, som har en negativ R0-værdi og en positiv T0-værdi (se lBFl i eksemplet).

Metode til tilnærmet løsning af Den Handelsrejsendes Problem

Trin 1: Transformer afstandstabellen T til ”nulsums-tabellen” T0.
Trin 2: Ud fra T0 dannes ”reduktions-tabellen” R0.
Trin 3 Vælg i denne tabel det felt, som er mindst.
Trin 4 Opgaven er herefter reduceret fra en opgave med N byer til en opgave med (N-1) byer.

Metoden finder en ”rimeligt kort” rute, men ikke nødvendigvis den korteste.
Metoden har jeg selv tænkt mig til, men den er sandsynligvis identisk med ”the greedy expectation heuristic” (Gutin and Yeo, 2002).

Løsningen til eksempel-tavlen

At den optimale rute i det konkrete eksempel er |ADGBCFEA|, kan ses ved at studere følgende transformation af nulsumstavlen T0:

Tabel T0	A	B	C	D	E	F	G	sum	addend
A	-	36	-30	-43	27	-13	23	0	43
B	-4	-	-37	-28	1	1	67	0	35
C	12	-38	-	120	-22	-41	-31	0	38
D	-64	51	5	-	42	23	-57	0	57
E	-60	-30	34	22	-	52	-18	0	53
F	74	44	-53	-30	-51	-	16	0	51
G	42	-63	81	-41	3	-22	-	0	63
sum	0	0	0	0	0	0	0	**0**	
addend	7	0	2	0	0	3	0		

Tabel O	A	B	C	D	E	F	G
A	-	79	15	0	70	33	66
B	38	-	0	7	36	39	102
C	57	0	-	158	16	0	7
D	0	108	64	-	99	83	0
E	0	23	89	75	-	108	35
F	132	95	0	21	0	-	67
G	112	0	146	22	66	44	-

Da der ikke findes negative felter i tabel O, vil rutelængden 0 være den optimale.

OBS: Man kan ikke altid lave en transformation, der så tydeligt som denne viser at en bestemt rute er optimal. Der findes ingen generel måde til at afgøre, om en rute er den korteste – bortset fra ved at sammenligne med alle andre ruter.